Programme de colles n°14

semaine du 16 au 20 janvier

Notions vues en cours

Chapitre 16 : Arithmétique

- Relation "divise", notation $a \mid b$, l'ensemble des diviseurs (resp. multiples) de a est noté $\mathcal{D}(a)$ (resp. $a\mathbb{Z}$)
- "Divise" restreint à $\mathbb{N}$ est une relation d'ordre. Sur $\mathbb{Z}$, non : si $a \mid b$ et $b \mid a$, on dit que a, b sont associés, propriétés diverses sur la relation divise
- Division euclidienne : théorème, cas où le reste est nul
- PGCD de deux entiers (non tous les deux nuls), notation $a \wedge b$, Si $a = bq + r$ (ce qui n'est pas une division euclidienne a priori) alors $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) = \mathcal{D}(b) \cap \mathcal{D}(r)$, propriété $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) = \mathcal{D}(a \wedge b)$, algorithme d'Euclide
- Théorème de Bézout-Bachet (nom officiel : relation de Bézout), couple de coefficients de Bézout de deux entiers, algorithme d'Euclide étendu
- Entiers premiers entre eux, théorème de Bézout, $\dfrac{a}{a \wedge b}$ et $\dfrac{b}{a \wedge b}$ sont premiers entre eux, forme irréductible d'une fraction
- Lemme de Gauss ; $(a_1 \wedge b = 1$ et $a_2 \wedge b = 1) \implies (a_1 a_2) \wedge b = 1$; $(a \mid c$ et $b \mid c$ et $a \wedge b = 1) \implies ab \mid c$
- PGCD de n entiers (non tous nuls), notation $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$, entiers premiers dans leur ensemble, entiers premiers entre eux deux à deux
- Généralisation des Théorèmes de Bézout-Bachet et de Bézout à n entiers, algorithme d'Euclide étendu à n entiers (principe)
- PPCM de deux entiers non nuls, $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = (a \vee b)\mathbb{Z}$, formule $(a \vee b)(a \wedge b) = |a| \times |b|$
- Nombre premier, lemme d'Euclide, tout entier admet un diviseur premier, décomposition en produit de facteurs premiers, il existe une infinité de nombres premiers
- Valuation p-adique, lecture des valuations sur la décomposition d'un entier
- Décomposition (dite généralisée) d'un entier $n \in \mathbb{N}^*$ selon un ensemble de nombres premiers $\{p_1, \ldots, p_r\}$ qui contient tous les facteurs premiers de n (les exposants peuvent alors être nuls)
- Valuation du produit / pgcd / ppcm, lien entre les valuations et la divisibilité / l'égalité de deux entiers
- Calcul pratique du pgcd et du ppcm en décomposant les entiers en produit de facteurs premiers

La notion de congruence est hors programme cette semaine.

Questions de cours

Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaitre.

- Division euclidienne : on ne démontrera que l'unicité Chapitre 16, Théorème 16.6
- Théorème de Bézout puis un des trois résultats de divisibilité (au choix de l'examinateur) Chapitre 16, Théorème 16.14 et une Propriété parmi 16.16, 16.17, 16.18
- Tout entier $n \geq 2$ admet un diviseur premier (avec démonstration), Décomposition en produit de facteurs premiers (énoncé uniquement) Chapitre 16, Lemme 16.30 et Théorème 16.31